数理解析研究所講究録
624巻 1987年 137-156

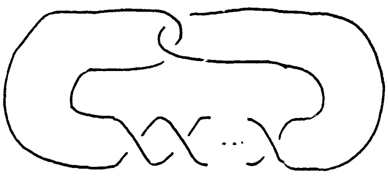
Doubly twisted knot の"sliceness"の決定

東大教養　山田明雄 (Akio Yamada)
東大　理　松本幸夫 (Yukio Matsumoto)

§1．主な結果

１９７５年のプレプリント（§３を見よ）の中でA. Casson とC. McA. Gordon はCasson-Gordon 不変量とよばれる強力な不変量を導入して，knotのslicenessを研究した．とくに2-bridge knot について，その不変量を計算するアルゴリズムを見出し，特殊な場合，すなわちtwist knot とよばれるknot K_t ($t \in \mathbb{Z}$) がいつslice になるか（ie. いつB^4の中でsmoothな円板をはるか）を決定した．

K_t

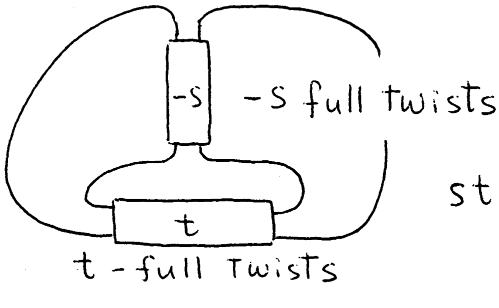


彼等によれば，twist knot K_tがslice になるための必

要十分条件は，$t=0$ または 2 である．（なお K_t が，"代数的にslice"となるのは，$4t+1=\ell^2$ という整数 ℓ があるときである．ここに，knot K が代数的にslice であるとは，K の Seifert form が階数が半分の部分空間で消えていることである．）

さて，knotが個別に与えられる毎に，ある不変量を計算するアルゴリズムが存在することと，一連のknot の系列について，その不変量がどのようなふるまいをするのかを理論的に示すこととは，全く別のことである．実際，2-bridge knot の Casson-Gordon 不変量を個々に計算するアルゴリズムが存在しても，2-bridge knotの無限の系列について Casson-Gordon 不変量を計算することは，上述のtwist knotについてしかなされていないように思われる．

ここでは，Casson-Gordonの計算を続行することによって，Doubly twisted knot の sliceness を決定しよう．ただし，Doubly twisted knot とは，下図のようなknotのことである．



$st \neq 0,\ s,t \in \mathbb{Z}$

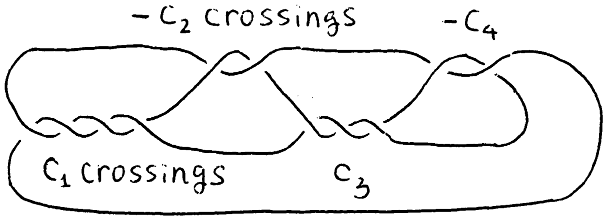
定理 1. 前頁下の Doubly twisted knot が slice のための必要十分条件は $|s-t|=1$ である。($s=1$ の場合が CASSON - GORDON の twist knot に関する結果と考えられる.)

良く知られているように (H. Schubert, Math. Zeit. 65. 1956) 正の有理数 $\frac{q}{p}$ $(q<p)$ が与えられると次のように 2-bridge knot がきまる. すなわち

$$\frac{q}{p} = \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cdots + \cfrac{1}{c_\nu}}} \qquad (c_i > 0)$$

$$=: [c_1, c_2, \cdots, c_\nu] \quad (\text{記号})$$

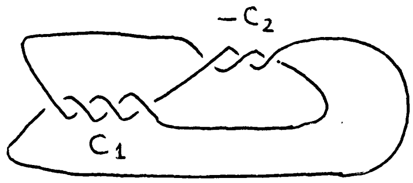
と連分数展開して, (たとえば $\nu=4$ の時) 下図のような knot を考えるのである.



連分数展開 $[c_1,c_2,\cdots,c_\nu]$ に対応するknot を

$$K_{c_1c_2\cdots c_\nu}$$

と書き，長さ ν の2-bridge knotとよぶことにしよう．すると，定理1は長さ2の2-bridge knotのslicenessの決定へと拡張することができる．

$K_{c_1c_2} :=$ 

$c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$
以下 c_1, c_2 はマイナスでもよいとする.

定理2．c_1, c_2 が同符号のとき，$K_{c_1c_2}$ について次は同値．

① $|c_1 - c_2| = 2$

② c_1, c_2 はともに偶数で $\left|\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2}\right| = 1$

③ $K_{c_1c_2}$ は ribbon knot である．(i.e. S^3 の中で， という "ribbon singularity" しかもたない円板をはる.)

④ $K_{c_1c_2}$ は slice knot である．

定理2において，$c_1 = 2t$，$c_2 = 2s$ とおけば，定理1の t と s が同符号の場合が得られる．以下定理2の証明をする．

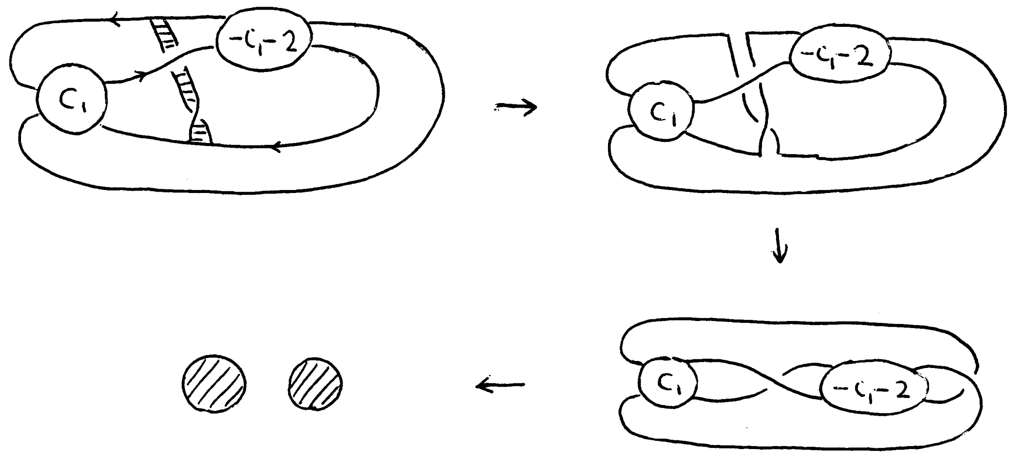
§2. 定理2の証明（①⇒②⇒③⇒④ の部分）

①⇒②を証明しよう．仮に，c_1, c_2 ともに奇数なら，$K_{c_1c_2}$ は2つの成分からなる link になってしまうので，c_1, c_2 はともに偶数としてよい．これで②が言えた．

②⇒③を示そう．次の補題に注意する．証明は容易である．

補題．$K_{c_1c_2} = -K_{c_2c_1} = K_{-c_2,-c_1}$．（$-K$ は K の鏡映）

この補題により，$c_2 > c_1$ としてよい．そこで $c_2 = c_1 + 2$ とする．c_1, c_2 はともに偶数と仮定した．$K_{c_1c_2}$ に下図のようにbandをつける．



上図の矢印を時間軸と解釈すると，円周の動いた軌跡としてB^4中の円板が与えられる．しかもこの円板には“極大点”がないので，K_{c_1,c_2} は ribbon knot である．なお②⇒③

にあたる事実はすでにFoxが証明している.(R.H. Fox, A Quick Trip Through Knot Theory, Topology of 3-manifolds and Related Topics, Proceedings of the 1961 Topology Institute, Ed. by M.K. Fort, Jr. の例15.)

③⇒④は良く知られている.

§3. 定理2の証明(④ ⇒ ① の部分)

定理2の ④ ⇒ ① を証明するには, 2-bridge knot について知られている幾つかの事実を用いるので, まずそれらを書き出しておこう.

以下しばらくの間, $K=K_{c_1\cdots c_\nu}$ とする, すなわち K は有理数 $\frac{q}{p}=[c_1,\cdots,c_\nu]$ に対応する 2-bridge knot であるとする. p と q は互に素としておく.

このとき

$$K: \text{slice} \quad \Rightarrow \quad p \text{ は平方数}$$

ということが知られている. 2-bridge knot K が代数的に slice であるならば, p は平方数となる(§1を参照).

このような K に対して $\ell:=\sqrt{p}$ と書くことにする.

我々の関心は「代数的に slice である K が slice となるのは, どのような場合か」という点にあるから, 以下では p が平方数となる K に限定して話を進める.

我々が用いる最も重要な事実は，CASSON－GORDON による次の結果である．

K： slice
m： lの素冪因数
χ： 位数（order）mを持つ指標（character）
すなわち $\chi : H_1(L_{p,\xi}) \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid z^m = 1\}$ 準同型写像
（$L_{p,\xi}$はレンズ空間で，Kの二重分岐被覆空間になっている．）
$\Longrightarrow$ $\lvert \sigma(K,\chi) \rvert \leqq 1$ ．
ここで $\sigma(K,\chi)$ は CASSON－GORDON の導入した不変量である．

この結果は

Cobordism of classical knots （1975）

というプレプリントに述べられているが，次の書物にも再録されている：

A la Recherche de la Topologie Perdue（失われたトポロジーを求めて），L. GUILLOU－A. MARIN 編，
Birkhäuser，1986．

ついでながら，この論文集は 1984年に亡くなった V. A. ROHLIN（РОХЛИН）に捧げられたもので，冒頭に

ROHLINの略伝と論文リストがあり,

第I部　Du côté de chez Rohlin

第II部　Le côté de Casson

の二部から成る. CASSON-GORDON の上記の論文は 第II部のp.181～197 に収録されている.

[参考] Marcel PROUST, A la Recherche du Temps Perdu
(失われた時を求めて), 全7篇, 1913～27.

第I篇　Du côté de chez Swann　(スワン家の方(ほう)へ)

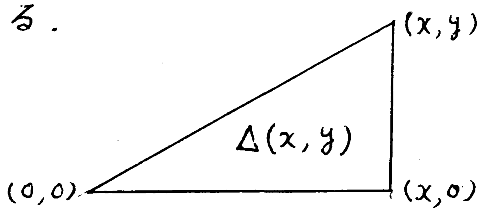
第III篇　Le côté de Guermantes　(ゲルマントの方)

さて, 上述の結果は重要であるが, 代数的に slice であるようなKが具体的に与えられたとき, 指標 χ をうまく見つけて, しかも $\sigma(K,\chi)$ を求めたのち $|\sigma(K,\chi)|>1$ ならば「Kは slice でない」と初めて判定できるということになるので, これだけでは直ちに計算にとりかかって sliceness が判定できるという形になっていない.

この点に対しても CASSON-GORDON は上記の論文の中で解答を与えている. すなわち, 指標 χ で位数が m となるものをうまく見つけて

$$\sigma(K,\chi^{\xi r}) = 4\left\{\text{area}\,\Delta\left(nr, \frac{\xi r}{m}\right) - \text{int}\,\Delta\left(nr, \frac{\xi r}{m}\right)\right\}$$
$$(0<r<m)$$

と書くことができる，というのである．



ここで　$n := \frac{p}{m}$　であり，

$\Delta(x,y)$ は $(0,0), (x,0), (x,y)$ を頂点とする三角形を表わし，

$\mathrm{area}\,\Delta(x,y)$ は その面積を，$\mathrm{int}\,\Delta(x,y)$ は $\Delta(x,y)$ 内の格子点（integer point．x 座標も y 座標も共に整数であるような点）の個数を それぞれ表わす。但し，辺の上の格子点は $\frac{1}{2}$ の重みをかけて数え，頂点が格子点となる場合には $\frac{1}{4}$ の重みをつけるが，原点は勘定に入れない．

χ^{gr} も位数が m の指標であるから，この結果と前述の結果とを組み合わせると

K：slice

m：ℓ の素冪因数

$$\Longrightarrow \quad 4\left|\mathrm{area}\,\Delta\left(nr, \frac{gr}{m}\right) - \mathrm{int}\,\Delta\left(nr, \frac{gr}{m}\right)\right| \leqq 1 \quad (0<r<m)$$

ということになる．従って，

$$\gamma(c_1, \cdots, c_\nu; m, r) := 4\left\{\mathrm{area}\,\Delta\left(nr, \frac{gr}{m}\right) - \mathrm{int}\,\Delta\left(nr, \frac{gr}{m}\right)\right\}$$

なる函数の値を計算した結果，もし $|\gamma(c_1, \cdots, c_\nu; m, r)| > 1$ なることが判明した場合には，「K は slice でない」と言えることになる．$c_1, \cdots, c_\nu$ と m, r が具体的な整数値として与えられれば，$\gamma(c_1, \cdots, c_\nu; m, r)$ の値が実際に「計算できる」

という点が重要である．

CASSON－GORDON も 上記の1975年の論文の中で，“a Hewlett-Packard calculator” を用いて この不変量を計算したと述べている．格子点の個数を数えるために当然プログラムを組んだはずであるから，使用機種は 世界で最初のプログラム電卓 HP-65（逆ポーランド記法に基づく）であったと推定される．

我々も遅れ馳せながら Hewlett-Packard 社のもっと新しいプログラム電卓など 高々携帯型の物を用いて γ の計算を行なってみたところ，γ は非常に微妙なふるまいをする函数であることが分かった。その例を少し挙げてみると，

$\gamma(24, 12; 17, r)$ の値は $r = 1, 2, \cdots, 8$ に対して順に

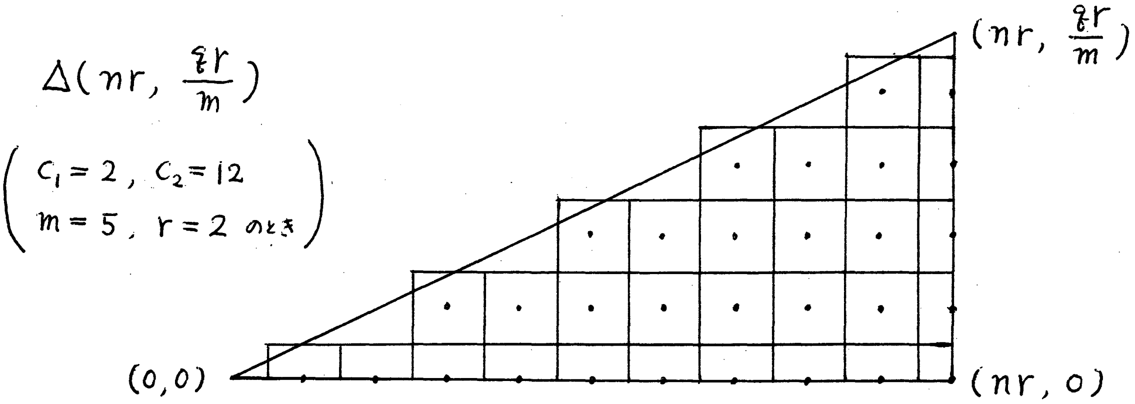
$$-9 \quad -9 \quad -1 \quad -3 \quad -7 \quad -3 \quad 3 \quad -5$$

となる．$r = 9, \cdots, 16$ に対しては $\gamma(24, 12; 17, 17-r)$ と等しくなる．また，c_1 と c_2 を入れかえた $\gamma(12, 24; 17, r)$ の値は $r = 1, \cdots, 8$ に対して順に

$$-3 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 9 \quad 5 \quad 9 \quad 7$$

となり，$-\gamma(24, 12; 17, r)$ $(1 \leq r \leq 8)$ に置換を施したものになっているらしいことが観察される．

そこで，γ の定義に立ち返って その意味を考えてみよう．まず，直角三角形 $\Delta(nr, \frac{\ell r}{m})$ の斜辺の傾きは



$\frac{q}{p}$ であるが，p と q は互に素で $nr<p$ であることから，この直角三角形の斜辺 $y=\frac{q}{p}x$ $(0<x\leqq nr)$ の上に格子点は存在しない．次に，三角形内の各格子点を中心として一辺の長さが1の正方形を描いてみる．但し，その格子点が辺上にあったり頂点である場合には，そのような正方形と三角形との共通部分をとる．すなわち，底辺上の格子点に対しては正方形の上半分を，y 軸に平行な辺上の格子点に対しては左半分をそれぞれとり，右下の頂点 $(nr,0)$ に対しては三角形内にある四半分のみをとる．そうすれば，これらの正方形やその半分・四半分により，この三角形の大半は直角をはさむ二辺の方からきっちりと敷きつめられる．従って，三角形の面積 area $\Delta(nr,\frac{qr}{m})$ と int $\Delta(nr,\frac{qr}{m})$ との差は，斜辺に沿った正方形の凹凸に起因しているわけである．すなわち，原点から出た傾き $\frac{q}{p}$ の線分が格子点の間をどのようにすり抜けて行くかということによって，γ の値は定まるのである(図を参照)．このことを考えてみても，γ は有理数 $\frac{q}{p}$ のすぐれて整数論

的な性質によって定まる微妙な量であることが諒解される.

それでは, γ の性質を解析する作業にとりかかろう. まず三角形の面積の方については

$$\operatorname{area}\Delta(nr, \frac{gr}{m}) = \frac{ngr^2}{2m} = \frac{pgr^2}{2m^2}$$

であり, m^2 は $p(=\ell^2)$ の約数であるから, $4\operatorname{area}\Delta(nr, \frac{gr}{m})$ は偶数である. 一方, $\operatorname{int}\Delta(nr, \frac{gr}{m})$ の定義において, 三角形の内部にある格子点は重み 1 で数えられ, 辺上の格子点は重み $\frac{1}{2}$ で数えられるから, 4倍されたとき共に偶数となる. そして頂点 $(nr, 0)$ のみが重み $\frac{1}{4}$ で数えられるから, 4倍されて 1 となる. 従って $4\operatorname{int}\Delta(nr, \frac{gr}{m})$ は奇数である. 故に $\gamma(c_1, \cdots, c_u; m, r)$ は奇数である(従って $\gamma \neq 0$ であることに注意. 前掲の例を参照).

次に

$$\operatorname{int}\Delta(nr, \frac{gr}{m}) = \sum_{x=1}^{nr-1}\left\lfloor\frac{gx}{p}\right\rfloor + \frac{nr-1}{2} + \frac{1}{2}\left\lfloor\frac{gr}{m}\right\rfloor + \frac{1}{4}$$

と書き表わしてみる. ここで

$$\lfloor u \rfloor := \max\{\, v \in \mathbb{Z} \mid v \leq u \,\}$$

である. $\lfloor u \rfloor$ は, 伝統的にガウス記号 $[u]$ で表わされていたものにほかならないが,

$$\lceil u \rceil := \min\{\, v \in \mathbb{Z} \mid v \geq u \,\}$$

と同程度に重要であることから, K. E. Iverson が導入した記号である. $\lfloor u \rfloor$ は床(ゆか)函数 (floor function), $\lceil u \rceil$ は天井函

数（ceiling function）と呼ばれ，組み合わせ論や計算機数学で次第に多く使われるようになって来ており，$\lfloor u \rfloor$ と $\lceil u \rceil$ の両方を組み込み函数として備えている計算機も出ている．

［参照］D. E. KNUTH, The Art of Computer Programming;

PÓLYA - TARJAN - WOODS, Notes on Introductory Combinatorics.

ガウス記号と違って，一まとまりの式をくくる大括弧［ ］と混同するおそれがないのも $\lfloor u \rfloor$ という記号の長所である．

さて，CASSON - GORDON の論文には，$\mathrm{int}\,\Delta(nr, \frac{gr}{m})$ を上記の如く表わした式は書かれていないが，途中の式変形の過程から，彼等は上記の式で計算を実行したと推定される．我々も doubly twisted knot すなわち $L=2$ の場合について，当初は上記の式をプログラムに組んで計算した．その際に，式の形からも分かるように nr が大きくなるにつれて次第に計算時間がかかるようになるので，何とか早く計算できる方法はないものかということを考えた．一組の (c_1, c_2) に対し，$p = c_1 c_2 + 1$ の平方根 ℓ の素冪因数 m は，ℓ が合成数なら複数個あり，その m の一つ一つに対して，$r=1$ から $r=m-1$ まで γ の計算を繰り返すのだから，なおさら計算時間を短縮する必要に迫られたわけである．

我々は，$c_1, c_2 > 0$ なる大量の (c_1, c_2) の組について $\gamma(c_1, c_2; m, r)$ を計算したのであるが，このとき $g = c_2$ は

pよりも小さい．前述の式では，三角形内部の格子点の個数を求めるときに x座標が同じものをまとめて数えたのちに $x=1,2,\cdots,nr-1$ についてそれらを加えているが，斜辺の傾き $\frac{q}{p}$ が 1 より小さいとすれば，y座標が同じである格子点の個数を求めてから yについて和をとった方が良いのではないかということに気が付いた．すなわち

$$\sum_{x=1}^{nr-1}\left\lfloor\frac{qx}{p}\right\rfloor=\sum_{y=1}^{\left\lfloor\frac{qr}{m}\right\rfloor}\left(nr-1-\left\lfloor\frac{py}{q}\right\rfloor\right)=(nr-1)\left\lfloor\frac{qr}{m}\right\rfloor-\sum_{y=1}^{\left\lfloor\frac{qr}{m}\right\rfloor}\left\lfloor\frac{py}{q}\right\rfloor$$

と変形した方が早く計算できる．例えば $c_1=10$ のとき約 $\frac{1}{10}$ の計算時間で済むということになる．

このように書きかえた式でしばらくの間は計算していたが，

よく考えてみると $\frac{py}{q}=\frac{(c_1c_2+1)y}{c_2}=c_1y+\frac{y}{c_2}$ であり，

$1\leqq y\leqq\frac{qr}{m}<q=c_2$ であるから 実は $\left\lfloor\frac{py}{q}\right\rfloor=c_1y$ である．従って

$$\sum_{x=1}^{nr-1}\left\lfloor\frac{qx}{p}\right\rfloor=(nr-1)\left\lfloor\frac{qr}{m}\right\rfloor-\frac{c_1}{2}\left\lfloor\frac{qr}{m}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{qr}{m}\right\rfloor+1\right)$$

という具合に和が求まってしまう．故に

$$\gamma(c_1,c_2;m,r)=\frac{2(c_1c_2+1)c_2r^2}{m^2}-\left\{\frac{2(c_1c_2+1)r}{m}-1\right\}\left(2\left\lfloor\frac{c_2r}{m}\right\rfloor+1\right)$$
$$+2c_1\left\lfloor\frac{c_2r}{m}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{c_2r}{m}\right\rfloor+1\right)$$

という公式を得る．これにより 計算時間が劇的に短縮され

るという量的な利点が得られたばかりでなく，γの性質を解明するための質的な進展も得られたのである．

以上で準備が整ったので，いよいよ ④ ⇒ ① の証明にとりかかろう．すなわち，c_1 と c_2 が同符号のときに，

$K_{c_1 c_2}$: slice $\Rightarrow |c_1 - c_2| = 2$ を示す．

まず，§2 で述べた knot の鏡映に関する補題により，

$c_1 > 0$ かつ $c_2 > 0$ としてよく，更に $c_2 \geqq c_1$ としてよい．

このとき

$$c_2^2 \geqq c_1 c_2 = \ell^2 - 1 > (\ell - 1)^2 \quad (\because c_1 c_2 > 0 \text{ より } \ell > 1)$$

となるので $c_2 > \ell - 1$ である．$c_2 = \ell$ ならば

$\ell(\ell - c_1) = 1$ より $\ell = 1$ となってしまうから結局

$$c_2 \geqq \ell + 1$$

となる．従って

$$c_1 \leqq \ell - 1$$

ということになり，

$$c_2 - c_1 \geqq 2$$

を得る．故に，m を ℓ の素冪因数とするとき，次のことさえ示せば ④ ⇒ ① の証明は終る．

$$\boxed{c_2 - c_1 > 2 \quad \Rightarrow \quad \gamma\left(c_1, c_2; m, \frac{m-1}{2}\right) > 1}$$

実は，l の任意の因数 $m(\geqq 3)$ に対して，この命題は真である（l は奇数だから m も奇数であることに注意）．これを証明しよう．前に得た公式に $r=\frac{m-1}{2}$ を代入して

$$\gamma(c_1, c_2; m, \tfrac{m-1}{2}) = \frac{(c_1c_2+1)c_2(m-1)^2}{2m^2} - \frac{c_1c_2(m-1)-1}{m}\left\{2\left\lfloor\frac{c_2(m-1)}{2m}\right\rfloor+1\right\}$$
$$+2c_1\left\lfloor\frac{c_2(m-1)}{2m}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{c_2(m-1)}{2m}\right\rfloor+1\right)$$

なる式を得る．ここで，$c_2(m-1)$ を $2m$ で割った余りを a と書けば

$$\gamma(c_1, c_2; m, \tfrac{m-1}{2}) = \frac{c_1a^2-2(c_1m+1)a+c_2(m^2-1)+2m}{2m^2}$$

となる．これを a の二次函数とみたときの軸の位置は

$$\frac{c_1m+1}{c_1} = m+\frac{1}{c_1}$$

である．a^2 の係数は正だから，γ の値を下から評価するためには，軸に最も近い a の整数値を考えてやればよいが，$a=m$ とはなりえない．なぜなら，$c_2(=g)$ は m と互に素だからである．従って $a=m+1$ における値を考えれば

$$\gamma(c_1, c_2; m, \tfrac{m-1}{2}) \geqq \frac{(c_2-c_1)(m^2-1)-2}{2m^2} \geqq \frac{3(m^2-1)-2}{2m^2} > 1 \quad (\because m\geqq 3)$$

という γ の値を下から評価する式が得られて，証明が完成する．

§4. c_1 と c_2 が異符号の場合

この場合には，次の結果が得られる．

<u>定理</u> 3. c_1 と c_2 が異符号のとき，$K_{c_1c_2}$ について次の①，②，③は同値である．

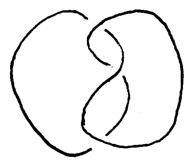
① $(c_1, c_2) \in \{ (1,-2), (-1,2), (2,-1), (-2,1), (5,-2), (-5,2), (2,-5), (-2,5) \}$

② $K_{c_1c_2}$ は ribbon knot である．

③ $K_{c_1c_2}$ は slice knot である．

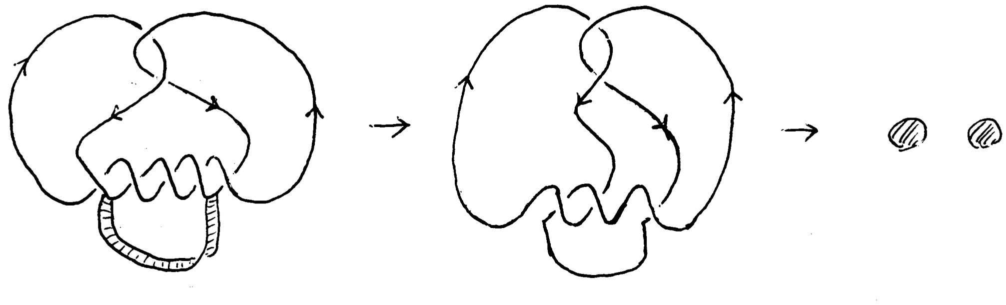
以下，定理3の証明を概略のみ示す．

(① ⇒ ②) $c_1 = 1$, $c_2 = -2$ のとき



(unknot)

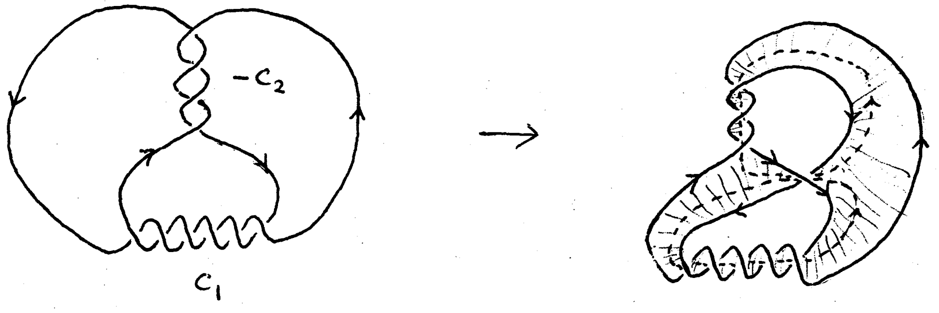
$c_1 = 5$, $c_2 = -2$ のとき



(③ ⇒ ①) c_1, c_2 の少なくとも一方は偶数であり，$K_{c_2c_1} = -K_{c_1c_2}$ だから，c_2 は偶数であるとして一般性を失わない．また，$K_{-c_1,-c_2} = -K_{c_1c_2}$ であるから，$c_1 > 0$,

$c_2<0$ としてよい．

このとき，仮に c_1 が偶数であるとすると，



図の点線で示した基底に関する Seifert 行列は

$$A=\begin{pmatrix}\frac{c_1}{2} & -1\\ 0 & -\frac{c_2}{2}\end{pmatrix}$$

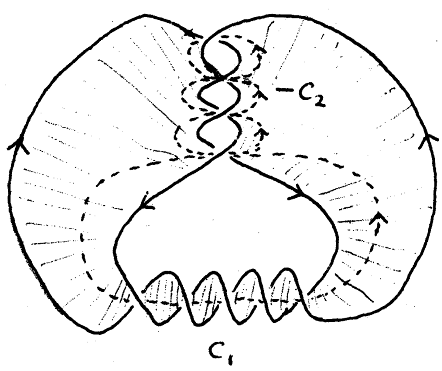
となり，

$$[\text{村杉 signature}] := \operatorname{sign}(A+A^T) = 2$$

を得る．$K_{c_1c_2}$ が slice ならば，その [村杉 signature] は 0 となるはずである（K. MURASUGI, Trans. AMS 117 (1965)）．従って，$K_{c_1c_2}$ が slice である今，c_1 は奇数であることが分かる．そこで，図のようにして Seifert 行列を求めると

$(-c_2)\times(-c_2)$ の行列

$$\begin{pmatrix}\frac{c_1-1}{2} & 0 & 0 & & \\ 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1\end{pmatrix}$$



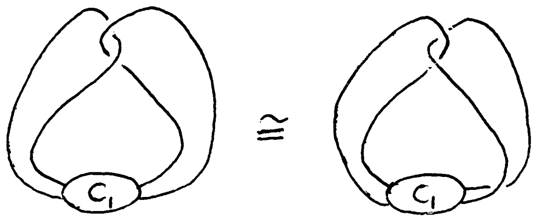
が得られ

$$[\text{村杉 signature}] = 2 + c_2$$

となる．$K_{c_1c_2}$ は slice であると仮定しているから，結局 $c_2 = -2$ である．ところが右図に示すごとく

$$K_{c_1,-2} \cong K_{c_1-1,2}$$

であるから，§1 で述べた CASSON-GORDON の結果により，$c_1 - 1 = 0$ または 4 すなわち $c_1 = 1$ または 5 を得る．



$K_{c_1,-2}$　　　　$K_{c_1-1,2}$

§5. 結び

定理2と定理3により，$K_{c_1c_2}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{Z})$ が slice となるすべての場合が決定される．$c_1 = 0$ または $c_2 = 0$ ならば $K_{c_1c_2}$ は unknot であることに注意して最終的にまとめると，次のようになる．

$K_{c_1c_2}$ が slice になるための必要十分条件は，次の(i)または(ii)または(iii)が成立することである． (i)　$c_1 = 0$ または $c_2 = 0$ (ii)　c_1, c_2 は共に偶数で $\lvert c_1 - c_2 \rvert = 2$ (iii)　$(c_1, c_2) \in \{(1,-2), (-1,2), (2,-1), (-2,1), (5,-2), (-5,2), (2,-5), (-2,5)\}$．

従って，定理1も s と t が異符号の場合まで含めて示されたことになる．

γ の値を大量に計算することによって，$c_1>0$ かつ $c_2>0$ のときに

$$|c_1-c_2|=2 \iff |\gamma(c_1,c_2;m,r)|=1 \quad (0<r<m)$$

が成立するであろうという予想の正しさに確信を持つに至ったのみならず，証明の鍵となった

「$r=\dfrac{m-1}{2}$ における値に着目する」

という発想も，計算したデータの解析を通して得られたものである．また，$\sum$ を使わずに $\gamma(c_1,c_2;m,r)$ を表わす公式も，計算機による計算時間を短縮する必要から発見されたものであると言える．

現在のところ，2-bridge knot に関しては，CASSON-GORDON の不変量よりも分解能の優れた不変量は発見されていないのだから，γ の性質を調べることにより判明する3種類の事柄はすべて調べつくすことが大切であり，そのために計算機は有効な手段を提供するであろう．

（§1, 2　松本
§3, 4, 5　山田）